



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

## Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2016

### Eletrodinâmica Clássica

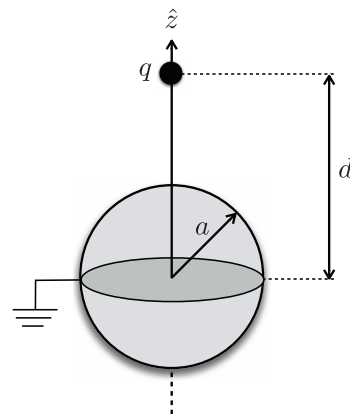
8/3/2016 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

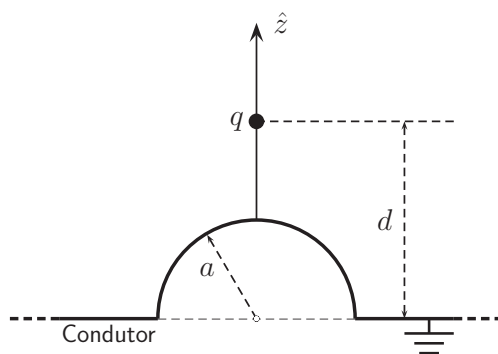
**Questão 1: Método das imagens**

- (a) (30%) Considere uma carga  $q$  colocada a uma distância  $d$  ( $d > a$ ) do centro de uma esfera metálica de raio  $a$ , aterrada, como mostra a figura ao lado:

Verifique que a *carga imagem* (necessária para satisfazer as condições de contorno para o potencial eletrostático) tem intensidade  $q' = -qa/d$  e dever ser localizada no ponto  $\vec{r}' = d'\hat{z}$ , onde  $d' = a^2/d$ .



- (b) (40%) Considere, agora, uma superfície condutora aterrada formada por uma placa infinita que possui, em certa região, uma protuberância na forma de um hemisfério condutor de raio  $a$ , como mostra a figura abaixo.



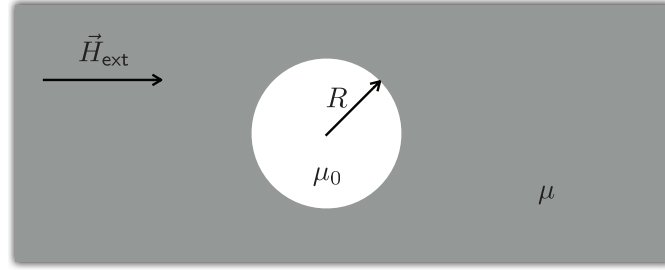
Uma carga  $q$  pontual é colocada no eixo do hemisfério a uma distância  $d$  ( $d > a$ ) da placa. Use argumentos de simetria e superposição para localizar as *cargas imagens* necessárias para satisfazer as condições de contorno para o potencial.

Calcule o potencial em todos os pontos da região externa ao condutor.

- (c) (30%) Calcule a distribuição de cargas induzidas nas superfícies plana e hemisférica do condutor.

## Questão 2: Magnetostática

Considere uma *cavidade esférica*, de raio  $R$ , colocada em um meio infinito de permeabilidade magnética  $\mu$ , na presença de um campo magnético uniforme  $\vec{H}_{\text{ext}} = H_0 \hat{z}$ , como esquematizado na figura abaixo.



- (a) (40%) Calcule o potencial escalar magnético  $\Phi_M$  *dentro* e *fora* da cavidade.
- (b) (30%) Mostre que o efeito da cavidade (para a distorção do campo magnético no meio) corresponde a um dipolo magnético localizado no centro da esfera. Em particular, identifique a direção e sentido do vetor momento de dipolo,  $\vec{m}_c$ , efetivo da cavidade.

Dado: o potencial de um dipolo  $\vec{m}$  é  $\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$ , onde  $\vec{r}$  é a posição a partir do dipolo.

- (c) (30%) Considere agora o problema de uma esfera, de raio  $R$ , feita de um material de permeabilidade magnética  $\mu$ , imersa em um meio não magnético, na presença de um campo magnético uniforme  $\vec{H}_{\text{ext}} = H_0 \hat{z}$ .

A partir do resultado do item (a), obtenha o campo magnético  $\vec{H}$  no interior da esfera magnetizada. (Sugestão: troque o papel dos meios.) Determine então a magnetização  $\vec{M}$  da esfera e calcule o seu momento de dipolo  $\vec{m}_e$ . Compare sua resposta para  $\vec{m}_e$  com o resultado para  $\vec{m}_c$  obtido na letra (b).

**QUESTÃO 3: Campo Eletromagnético dependente do tempo**

Considere um capacitor de placas paralelas circulares de raio  $R$  e distância  $d$  entre placas, como esquematizado na figura ao lado. O capacitor é alimentado por fios condutores conectados ao centro de cada uma de suas placas. A tensão de alimentação é *variável no tempo* na forma:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t,$$

onde  $V_0$  é constante,  $\omega$  é a frequência e  $t$ , o tempo.

Os campos elétrico e magnético gerados entre as placas do capacitor podem ser escritos, em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , como séries nas seguintes formas:

$$\vec{E} = [E_0 + E_2(\rho, \omega) + \dots] \cos \omega t \hat{z}$$

$$\vec{B} = [B_1(\rho, \omega) + B_3(\rho, \omega) + \dots] \sin \omega t \hat{\phi}$$

onde  $E_n(\rho, \omega) = \omega^n \mathcal{E}_n(\rho)$  e  $B_n(\rho, \omega) = \omega^n \mathcal{B}_n(\rho)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Considerando os efeitos de borda como desprezíveis ( $R \gg d$ ) e usando as equações de Maxwell:

- (a) (30%) Calcule  $B_1(\rho)$ , a partir de  $E_0$ , em função de  $\rho$ ,  $d$ ,  $V_0$  e  $c$ ;
- (b) (30%) A partir de  $B_1(\rho)$ , obtenha  $E_2(\rho)$  em função de  $\rho$ ,  $d$ ,  $V_0$  e  $c$ .
- (c) (20%) A solução analítica no limite  $R \gg d$  para o campo elétrico no interior do capacitor é

$$E = E_0 J_0\left(\frac{\omega \rho}{c}\right) \cos \omega t.$$

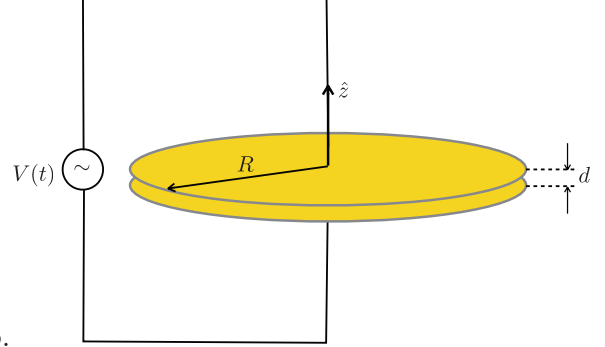
onde  $J_0(x)$  é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero.

Verifique que a solução aproximada encontrada para o campo elétrico nos itens (a) e (b) está de acordo com a solução exata no regime de baixas frequências.

Dado:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{36} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots, \quad x < 1.$$

- (d) (20%) Explique, à luz das equações de Maxwell, a *origem física* dos vários termos das séries para as soluções de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .



### Questão 4: Ondas Eletromagnéticas em Meios Dielétricos

Considere uma onda eletromagnética plana monocromática, de frequência  $\omega$ , propagando-se em um meio dielétrico de permissividade  $\epsilon$ .

- (a) (30%) Mostre que a *intensidade*  $I$  da onda, definida como a potência média por unidade de área transportada pela onda, pode ser escrita como

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n E_0^2,$$

onde  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  é a velocidade da luz no vácuo,  $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  é o índice de refração do meio e  $E_0$ , a amplitude do campo elétrico da onda.

- (b) (50%) Considere agora o caso de uma onda monocromática propagando-se em um meio de índice de refração  $n_1$ , incidindo perpendicularmente em uma interface plana com um segundo meio, de índice de refração  $n_2$ .

Mostre que as intensidades das ondas refletida e transmitida (relativas à intensidade da onda incidente) são dadas respectivamente por

$$I_r = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{e} \quad I_t = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

- (c) (20%) Suponha que o segundo meio é um material dielétrico *com perdas*, caracterizado por uma condutividade ôhmica  $\sigma$  e uma permissividade  $\epsilon'_2$ .

Mostre, a partir das equações de Maxwell, que esse meio pode ser descrito por uma permissividade complexa  $\epsilon_2 = \epsilon'_2 + i\sigma/\omega$  ou, alternativamente, por um índice de refração complexo  $n_2 = \sqrt{(\epsilon'_2 + i\sigma/\omega)/\epsilon_0}$ .

Análise as expressões acima para as intensidades das ondas refletida e transmitida no limite em que  $\sigma \rightarrow \infty$ . Discuta fisicamente o resultado obtido nesse regime.

## Informações Auxiliares

### Identidades Vetoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \Phi \times \vec{A} + \Phi \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

### Teoremas da divergência e de Stokes

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} da, \quad \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}.$$

### Equações de Maxwell em meios materiais

#### Forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

onde  $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  e  $\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ . Em meios lineares:  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

#### Forma integral

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_{\text{eng}},$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0,$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot \hat{n} da,$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{env}} + \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot \hat{n} da.$$

### Solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria axial

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta).$$